Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 «Программная инженерия» –

Системное и прикладное программное обеспечение

**УИР №2**

**«Марковские модели систем массового обслуживания»**

**По моделированию**

**Вариант: 16/31**

**Выполнили:**

студенты 3 курса  
Барсуков Максим Андреевич

Горляков Даниил Петрович

**Группа:** P3315

**Принял:**

Алиев Тауфик Измайлович

Отчёт принят «\_\_»\_\_\_\_\_2024 г.

Оценка: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

г. Санкт-Петербург, 2024

# Задание

# Цель работы

Изучение метода марковских случайных процессов и его применение для исследования простейших моделей – систем массового обслуживания (СМО) с однородным потоком заявок.

## Содержание отчета

Разработка и расчет марковских моделей одно- и многоканальных СМО с однородным потоком заявок и выбор наилучшего варианта построения СМО в соответствии с заданным критерием эффективности. В процессе исследований для расчета характеристик функционирования СМО используется программа MARK

## Этапы работы

1. Разработка марковских моделей исследуемых систем.
2. Освоение программы MARK.
3. Проведение расчетов по разработанным моделям и обработка результатов.
4. Анализ полученных результатов.
5. Выбор наилучшего варианта организации системы из двух вариантов в соответствии с заданным критерием эффективности

## Порядок выполнения работы

1. Получить вариант работы.
2. Построить графы переходов для заданных СИСТЕМЫ\_1 и СИСТЕМЫ\_2.
3. С использованием программы MARK рассчитать характеристики марковского процесса для СИСТЕМЫ\_1 и СИСТЕМЫ\_2.
4. Проанализировать характеристики функционирования системы.
5. Выбрать и обосновать наилучший способ организации системы в соответствии с заданным критерием эффективности.

## Содержание отчета

1. Постановка задачи и исходные данные.
2. Описание исследуемой системы.
3. Перечень состояний марковского процесса для исследуемой системы.
4. Результаты работы:
   1. размеченный граф переходов марковского процесса;
   2. матрица интенсивностей переходов;
   3. значения стационарных вероятностей, сведенные в таблицу (форма 1);
   4. формулы, используемые для расчета характеристик системы и значения характеристик системы, сведенные в таблицы (форма 2);
   5. результаты (графики и выводы) сравнительного анализа характеристик функционирования исследуемых систем;
   6. обоснование выбора наилучшего варианта организации системы в соответствии с заданным критерием эффективности**.**

## Исходные данные

Таблица 1. Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем

| **Вариант** | **Система 1** | | **Система 2** | |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Приборы** | **Емкость Накопителей** | **Приборы** | **Емкость Накопителей** |
| 16/31 | 3 | 1/1/0 | 2 () | 2 |

*Критерий эффективности:* (а) максимальная производительность системы.

Таблица 2. Параметры нагрузки

| **Номер варианта** | **Интенс. потока** | **Ср.длит.обслу ж.** | **Вероятности занятия прибора** | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 𝝺, 1/c | **b**, c | **П1** | **П2** | **П3** |
| 15 | 1,0 | 2 | 0,6 | 0,25 | 0,15 |

# 

### 

### 

### 

### 

### 

### 

### 

# Выполнение

## Система 1

### Описание исследуемой системы

* Система содержит 3 обслуживающих прибора
* Поток поступающих в систему заявок однородный
* Длительность обслуживания заявок в приборе – случайная величина
* Перед первым и вторым прибором есть 1 место для заявок, ожидающих обслуживания и образующих очередь. Перед третьим прибором - 0 мест, заявка идет сразу в прибор.
* Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью λ .
* Длительность обслуживания заявок в приборе распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью μ = 1/ b , где b – средняя длительность обслуживания.
* Дисциплина буферизации – с потерями: заявка, поступившая в систему и заставшая накопитель заполненным, теряется.
* Дисциплина обслуживания – в порядке поступления по правилу «first come – first served».
* Заявка, поступившая в систему, с заданной вероятностью занятия прибора направляется к соответствующему прибору и ставится в очередь, либо теряется, если накопитель заполнен или отсутствует

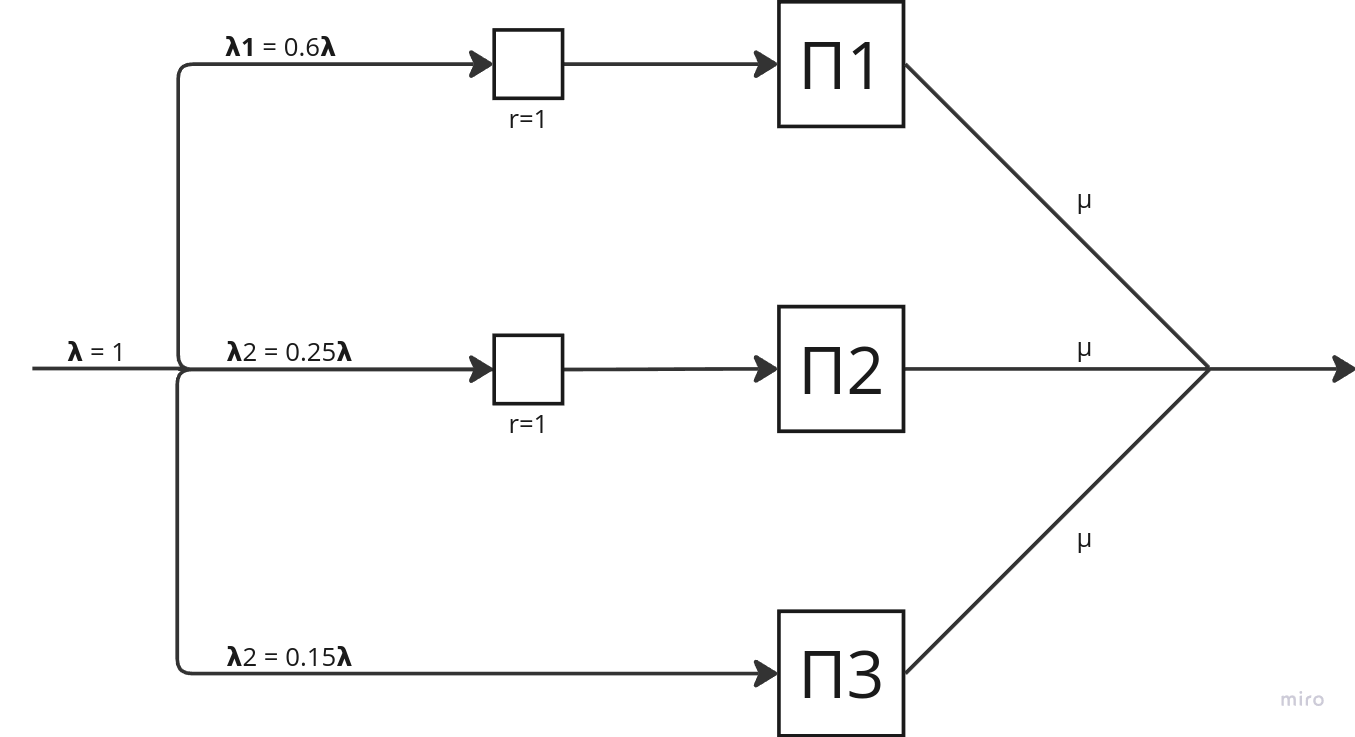


Рисунок 1. Схематичное представление Системы 1.

* Интенсивность входного потока: λ = 1 c−1
* Средняя длительность обслуживания b = 2 с
* Интенсивность обслуживания прибора: c−1

Классификация каждого из приборов по Кендаллу:

1. M/M/1/1
2. M/M/1/1
3. M/M/1/0

### Перечень состояний:

Обозначим состояние системы как n1/q1/n2/q2/n3, где

* n1 – число заявок на П1, q1 – число заявок в очереди на П1.
* n2 – число заявок на П2, q2 – число заявок в очереди на П2.
* n3 – число заявок на П3, очередь отсутствует.

Таблица 3. Перечень возможных состояний Системы 1

| **№ состояния** | **Обозначение** | **Описание** |
| --- | --- | --- |
| S0 | 0/0/0/0/0 | В системе нет заявок |
| S1 | 1/0/0/0/0 | В системе 1 заявка, обрабатываемая на П1 |
| S2 | 0/0/1/0/0 | В системе 1 заявка, обрабатываемая на П2 |
| S3 | 0/0/0/0/1 | В системе 1 заявка, обрабатываемая на П3 |
| S4 | 1/0/1/0/0 | В системе 2 заявки, обрабатываемые на П1 и П2 |
| S5 | 1/0/0/0/1 | В системе 2 заявки, обрабатываемые на П1 и П3 |
| S6 | 0/0/1/0/1 | В системе 2 заявки, обрабатываемые на П2 и П3 |
| S7 | 1/1/0/0/0 | В системе 2 заявки, обрабатываемая на П1 и в очереди на П1 |
| S8 | 0/0/1/1/0 | В системе 2 заявки, обрабатываемая на П2 и в очереди на П2 |
| S9 | 1/0/1/0/1 | В системе 3 заявки: на П1, П2, П3 |
| S10 | 1/1/0/0/1 | В системе 3 заявки: на П1, П3, и в очереди на П1. |
| S11 | 0/0/1/1/1 | В системе 3 заявки: на П2, П3, и в очереди на П2. |
| S12 | 1/1/1/0/0 | В системе 3 заявки: на П1, П2, и в очереди на П1. |
| S13 | 1/0/1/1/0 | В системе 3 заявки: на П1, П2, и в очереди на П2. |
| S14 | 1/1/1/0/1 | В системе 4 заявки: на П1, П2, П3, и в очереди на П1. |
| S15 | 1/0/1/1/1 | В системе 4 заявки: на П1, П2, П3, и в очереди на П2. |
| S16 | 1/1/1/1/0 | В системе 4 заявки: на П1 и П2, и в очередях на П1 и П2. |
| S17 | 1/1/1/1/1 | В системе 5 заявок: на П1, П2, П3, и в очередях на П1 и П2. |

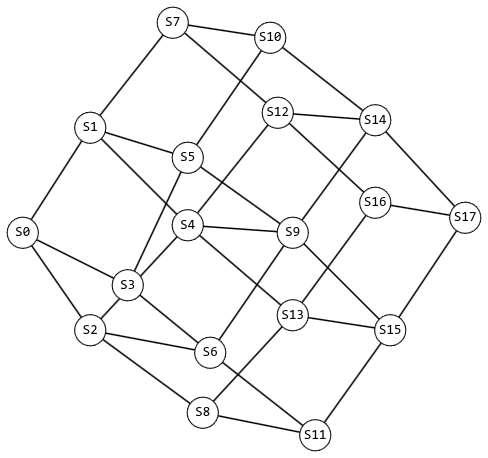


Рисунок 2. Граф переходов Системы 1.

N.B. Каждое соединение двунаправленное.

| C1 | S0 | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 | S6 | S7 | S8 | S9 | S10 | S11 | S12 | S13 | S14 | S15 | S16 | S17 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| S0 | -1 | 0,6 | 0,25 | 0,15 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| S1 | 0,5 | -1,5 |  |  | 0,25 | 0,15 |  | 0,6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| S2 | 0,5 |  | -1,5 |  | 0,6 |  | 0,15 |  | 0,25 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| S3 | 0,5 |  |  | -1,35 |  | 0,6 | 0,25 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| S4 |  | 0,5 | 0,5 |  | -1,85 |  |  |  |  |  |  |  | 0,6 | 0,25 |  |  |  |  |
| S5 |  | 0,5 |  | 0,5 |  | -1,85 |  |  |  | 0,25 | 0,6 |  |  |  |  |  |  |  |
| S6 |  |  | 0,5 | 0,5 |  |  | -1,85 |  |  | 0,6 |  | 0,25 |  |  |  |  |  |  |
| S7 |  | 0,5 |  |  |  |  |  | -0,9 |  |  | 0,15 |  | 0,25 |  |  |  |  |  |
| S8 |  |  | 0,5 |  |  |  |  |  | -1,25 |  |  | 0,15 |  | 0,6 |  |  |  |  |
| S9 |  |  |  |  |  | 0,5 | 0,5 |  |  | -1,85 |  |  |  |  | 0,6 | 0,25 |  |  |
| S10 |  |  |  |  |  | 0,5 |  | 0,5 |  |  | -1,25 |  |  |  | 0,25 |  |  |  |
| S11 |  |  |  |  |  |  | 0,5 |  | 0,5 |  |  | -1,6 |  |  |  | 0,6 |  |  |
| S12 |  |  |  |  | 0,5 |  |  | 0,5 |  |  |  |  | -1,25 |  |  |  | 0,25 |  |
| S13 |  |  |  |  | 0,5 |  |  |  | 0,5 |  |  |  |  | -1,75 |  | 0,15 | 0,6 |  |
| S14 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 0,5 | 0,5 |  |  |  | -1,25 |  |  | 0,25 |
| S15 |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 0,5 |  | 0,5 |  | 0,5 |  | -2,1 |  | 0,6 |
| S16 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 0,5 | 0,5 |  |  | -1,15 | 0,15 |
| S17 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 0,5 | 0,5 | 0,5 | -1,5 |

Таблица 4. Матрица интенсивностей переходов Системы 1.

| p0 | p1 | p2 | p3 | p4 | p5 | p6 | p7 | p8 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0,150635 | 0,117448 | 0,062942 | 0,120881 | 0,025221 | 0,074269 | 0,072665 | 0,072091 | 0,015622 |
| p9 | p10 | p11 | p12 | p13 | p14 | p15 | p16 | p17 |
| 0,049536 | 0,061319 | 0,017945 | 0,036974 | 0,021110 | 0,042547 | 0,016405 | 0,026124 | 0,016266 |

Таблица 5. Значения стационарных вероятностей в точках Системы 1.

| Хар-ка | Прибор | Расчетная формула | Сист.1 |
| --- | --- | --- | --- |
| Нагрузка | П1 |  | 1.2 |
| П2 |  | 0.5 |
| П3 |  | 0.3 |
| Сумм |  | 2 |
| Загрузка | П1 |  | 0.559310 |
| П2 |  | 0.403357 |
| П3 |  | 0.471833 |
| Сумм |  | 0.478166 |
| Вероятность потери | П1 |  | 0.255321 |
| П2 |  | 0.113472 |
| П3 |  | 0.471833 |
| Сумм |  | 0.252335 |
| Длина очереди | П1 |  | 0.255321 |
| П2 |  | 0.113472 |
| П3 |  | 0 |
| Сумм |  | 0.368793 |
| Число заявок в системе | П1 |  | 0.814631 |
| П2 |  | 0.516829 |
| П3 |  | 0.471833 |
| Сумм |  | 1.803293 |
| Произ  водительность | П1 |  | 0.446807 |
| П2 |  | 0.221632 |
| П3 |  | 0.079225 |
| Сумм |  | 0.747664 |
| Коэффициент простоя системы | П1 |  | 0.44069 |
| П2 |  | 0.596643 |
| П3 |  | 0.528167 |
| Сумм |  | 0.521833 |
| Время ожидания | П1 |  | 0.571434 |
| П2 |  | 0.511983 |
| П3 |  | 0 |
| Сумм |  | 1.112433 |
| Время пребывания | П1 |  | 2.571434 |
| П2 |  | 2.511983 |
| П3 |  | 2 |
| Сумм |  | 3.112433 |

Таблица 6. Характеристики Системы 1.

## Система 2

### Описание исследуемой системы

* Система содержит 2 обслуживающих прибора
* Поток поступающих в систему заявок однородный
* Длительность обслуживания заявок в П1 – случайная величина
* Перед первым и вторым прибором есть 2 места для заявок, ожидающих обслуживания и образующих очередь.
* Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью λ .
* Длительность обслуживания заявок в П1 распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью μ = 1/ b , где b – средняя длительность обслуживания.
* Длительность обслуживания заявок в П2 – распределена по гиперэкспоненциальному закону с коэффициентом вариации *v* = 2.

b = 2 с, выбираем q =

→

→

Проверка условия: →

* Дисциплина буферизации – с потерями: заявка, поступившая в систему и заставшая накопитель заполненным, теряется.
* Дисциплина обслуживания – в порядке поступления по правилу «first come – first served».
* Заявка, поступившая в систему, с заданной вероятностью занятия прибора направляется к соответствующему прибору и ставится в очередь, либо теряется, если накопитель заполнен или отсутствует

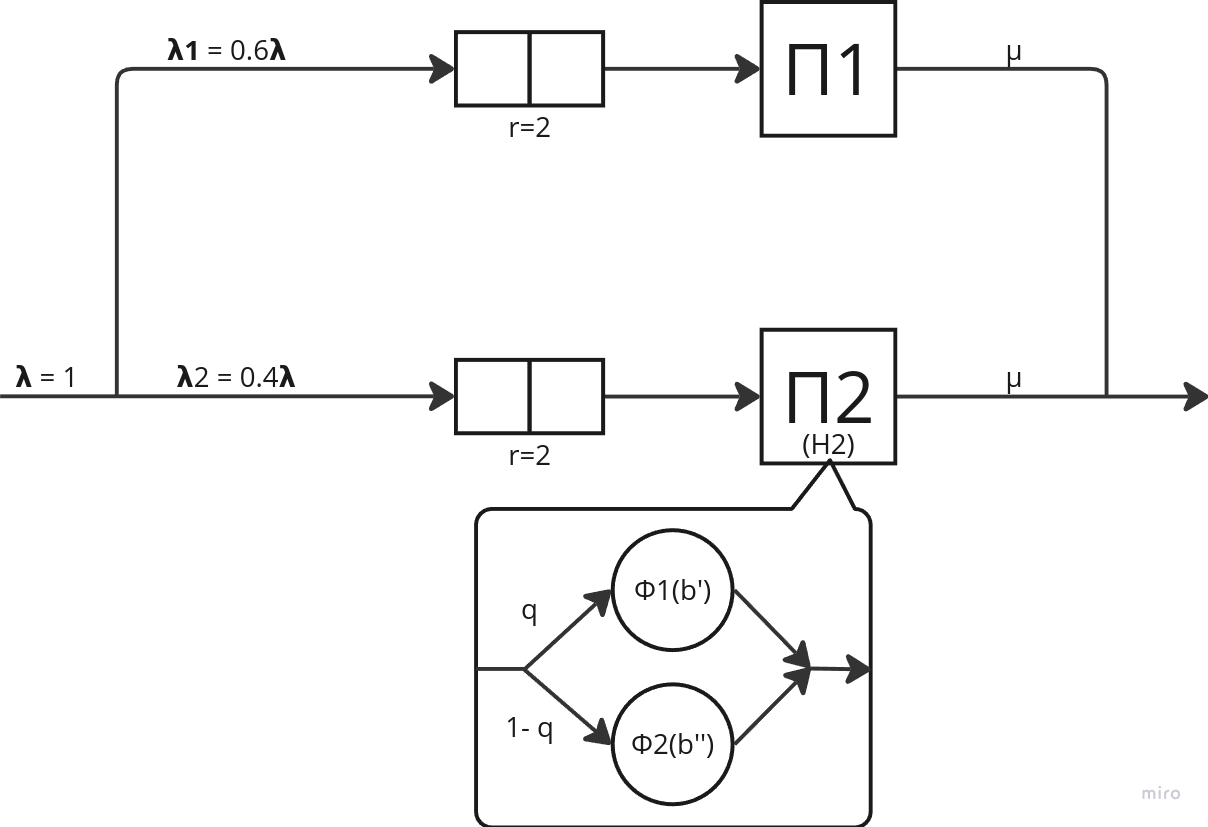


Рисунок 1. Схематичное представление Системы 2.

* Интенсивность входного потока: λ = 1 c−1

Классификация каждого из приборов по Кендаллу:

1. M/M/1/2
2. M/H2/1/2

### Перечень состояний:

Обозначим состояние системы как

n1/n2

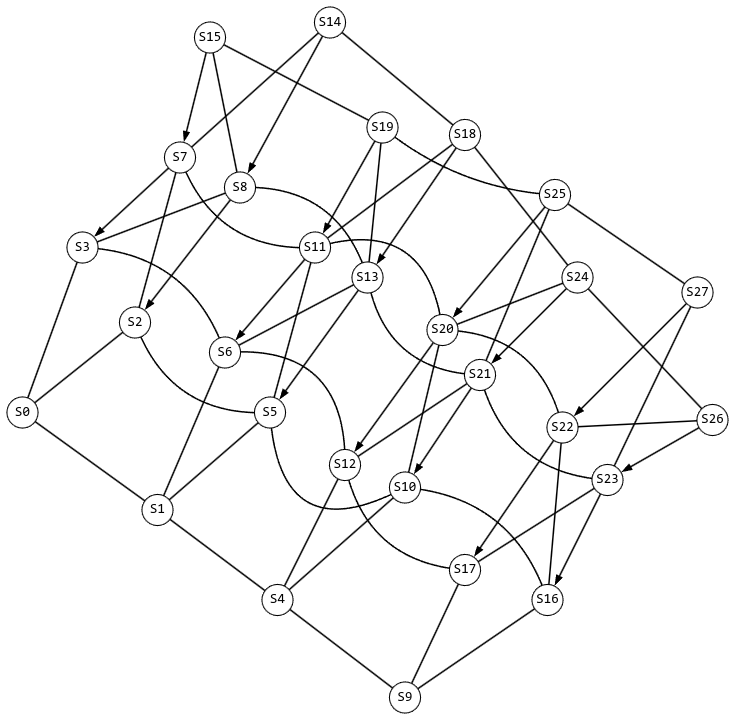
q1/q2,

где

* n1 – число заявок на П1, q1 – число заявок в очереди на П1.
* n2 – число заявок на П2, q2 – число заявок в очереди на П2.

Таблица 7. Перечень возможных состояний Системы 2

| **№ состояния** | **Обозначение** | **Описание** |
| --- | --- | --- |
| S0 | 0/0  0/0 | В системе 0 заявок |
| S1 | 1/0  0/0 | В системе 1 заявка, обрабатываемая на П1 |
| S2 | 0/  0/0 | В системе 1 заявка, обрабатываемая на первом этапе П2 |
| S3 | 0/  0/0 | В системе 1 заявка, обрабатываемая на втором этапе П2 |
| S4 | 1/0  1/0 | В системе 2 заявки, обрабатываемая на П1 и в очереди на П1 |
| S5 | 1/  0/0 | В системе 2 заявки, обрабатываемые на П1 и первом этапе П2 |
| S6 | 1/  0/0 | В системе 2 заявки, обрабатываемые на П1 и втором этапе П2 |
| S7 | 0/  0/1 | В системе 2 заявки, обрабатываемая на первом этапе П2 и в очереди на П2 |
| S8 | 0/  0/1 | В системе 2 заявки, обрабатываемая на втором этапе П2 и в очереди на П2 |
| S9 | 1/0  2/0 | В системе 3 заявки: на П1 и 2 в очереди на П1 |
| S10 | 1/  1/0 | В системе 3 заявки: на П1, первом этапе П2, и в очереди на П1. |
| S11 | 1/  0/1 | В системе 3 заявки: на П1, первом этапе П2, и в очереди на П2. |
| S12 | 1/  1/0 | В системе 3 заявки: на П1, втором этапе П2, и в очереди на П1. |
| S13 | 1/  0/1 | В системе 3 заявки: на П1, втором этапе П2, и в очереди на П2. |
| S14 | 0/  0/2 | В системе 3 заявки: на первом этапе П2, и 2 в очереди на П1. |
| S15 | 0/  0/2 | В системе 3 заявки: на втором этапе П2, и 2 в очереди на П1. |
| S16 | 1/  2/0 | В системе 4 заявки: на П1, первом этапе П2 и 2 в очереди на П1. |
| S17 | 1/  2/0 | В системе 4 заявки: на П1, втором этапе П2 и 2 в очереди на П1. |
| S18 | 1/  0/2 | В системе 4 заявки: на П1, первом этапе П2 и 2 в очереди на П2. |
| S19 | 1/  0/2 | В системе 4 заявки: на П1, втором этапе П2 и 2 в очереди на П2. |
| S20 | 1/  1/1 | В системе 4 заявки: на П1, первом этапе П2 и в очереди на П1 и П2. |
| S21 | 1/  1/1 | В системе 4 заявки: на П1, втором этапе П2 и в очереди на П1 и П2 |
| S22 | 1/  2/1 | В системе 5 заявок: на П1, первом этапе П2 и 2 в очереди на П1, 1 в очереди на П2. |
| S23 | 1/  2/1 | В системе 5 заявок: на П1, втором этапе П2 и 2 в очереди на П1, 1 в очереди на П2. |
| S24 | 1/  1/2 | В системе 5 заявок: на П1, первом этапе П2 и 2 в очереди на П2, 1 в очереди на П1. |
| S25 | 1/  1/2 | В системе 5 заявок: на П1, втором этапе П2 и 2 в очереди на П2, 1 в очереди на П1. |
| S26 | 1/  2/2 | В системе 6 заявок: на П1, первом этапе П2 и 2 в очереди на П2, 2 в очереди на П1. |
| S27 | 1/  2/2 | В системе 6 заявок: на П1, втором этапе П2 и 2 в очереди на П2, 2 в очереди на П1. |

Рисунок 2. Граф переходов Системы 2.

N.B. Каждое соединение без стрелки двунаправленное.

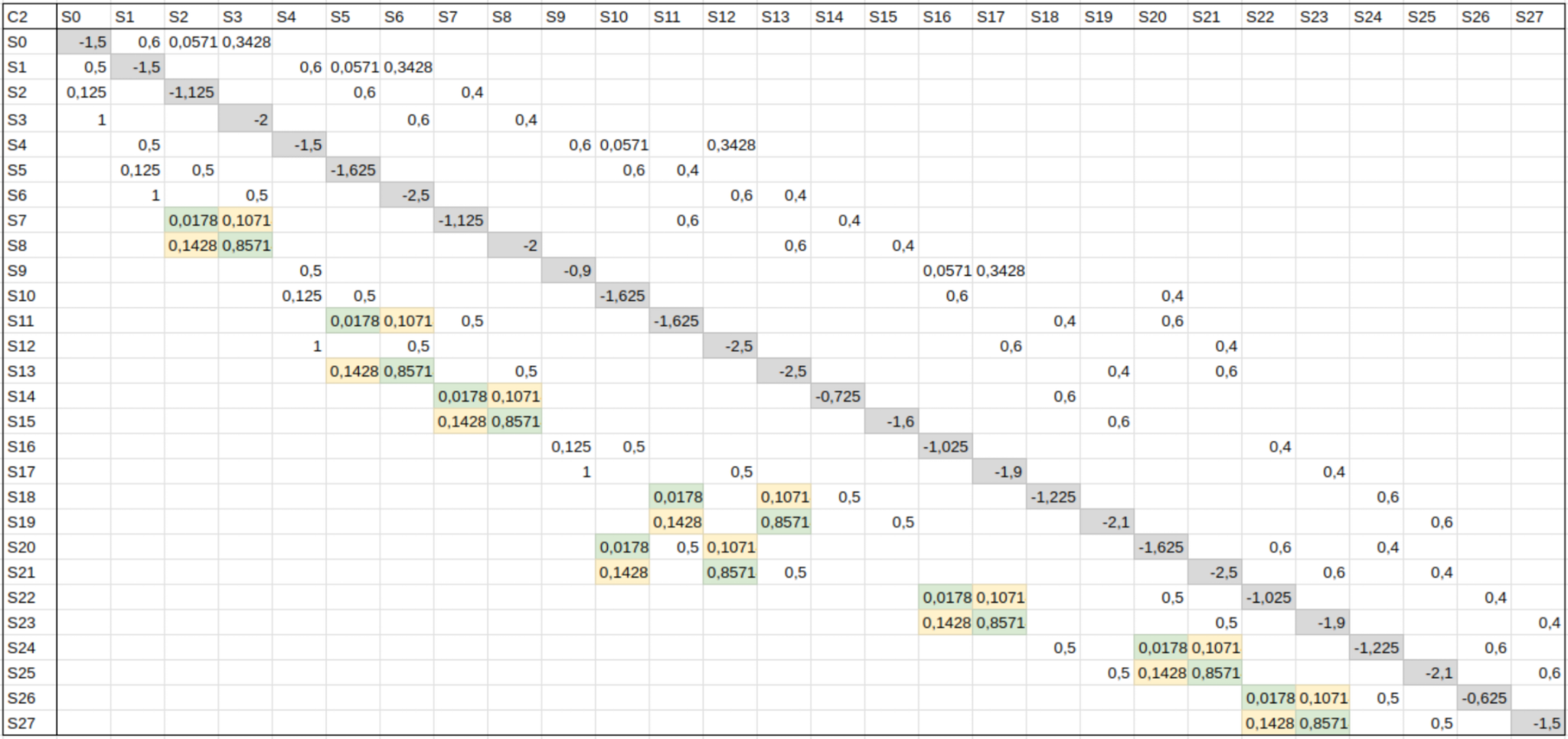


Таблица 8. Матрица интенсивностей переходов Системы 2.

|  | односторонние стрелки |
| --- | --- |
|  | связанные с 0.4 |

[3315\_Барсуков\_Горляков\_УИР2](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1R5VJpYDZlM8PNxi-3MOWQ0MCcez2O56IuAsndU44OWE/edit?gid=695745060#gid=695745060&range=B2:AD30)

| p0 | p1 | p2 | p3 | p4 | p5 | p6 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0,073611 | 0,088334 | 0,012393 | 0,027895 | 0,106 | 0,014872 | 0,033474 |
| p7 | p8 | p9 | p10 | p11 | p12 | p13 |
| 0,012379 | 0,014568 | 0,1272 | 0,017847 | 0,014855 | 0,040169 | 0,017482 |
| p14 | p15 | p16 | p17 | p18 | p19 | p20 |
| 0,039614 | 0,005827 | 0,021416 | 0,048203 | 0,047537 | 0,006993 | 0,017826 |
| p21 | p22 | p23 | p24 | p25 | p26 | p27 |
| 0,020978 | 0,021392 | 0,025174 | 0,057044 | 0,008391 | 0,068453 | 0,010069 |

Таблица 9. Значения стационарных вероятностей в точках Системы 2.

| Хар-ка | Прибор | Расчетная формула | Сист.1 |
| --- | --- | --- | --- |
| Нагрузка | П1 |  | 1.2 |
| П2 |  | 0.8 |
| Сумм |  | 2 |
| Загрузка | П1 |  | 0.813713 |
| П2 |  | 0.604855 |
| Сумм |  | 0.709284 |
| Вероятность потери | П1 |  | 0.321907 |
| П2 |  | 0.243928 |
| Сумм |  | 0.290715 |
| Длина очереди | П1 | +2() | 0.912069 |
| П2 | ) | 0.63251 |
| Сумм |  | 1.544579 |
| Число заявок в системе | П1 |  | 1.725782 |
| П2 |  | 1.237365 |
| Сумм |  | 2.963147 |
| Произ  водительность | П1 |  | 0.406856 |
| П2 |  | 0.302429 |
| Сумм |  | 0.709285 |
| Коэффициент простоя системы | П1 |  | 0.186287 |
| П2 |  | 0.395145 |
| Сумм |  | 0.581432 |
| Время ожидания | П1 |  | 2.241750 |
| П2 |  | 2.091434 |
| Сумм |  | 2.177658 |
| Время пребывания | П1 |  | 4.241750 |
| П2 |  | 4.091434 |
| Сумм |  | 4.177658 |

Таблица 10. Характеристики Системы 2.

## Результаты

|  | система1 | система2 |
| --- | --- | --- |
| Нагрузка | 2 | 2 |
| Загрузка | 0,478166 | 0.709284 |
| Вероятность потери | 0.255502 | 0.290715 |
| Длина очереди | 0.368793 | 1.544579 |
| Число заявок в системе | 1.803293 | 2.963147 |
| Производительность | 0.747664 | 0.709285 |
| Коэффициент простоя системы | 0.521833 | 0.581432 |
| Время ожидания | 1.112433 | 2.177658 |
| Время пребывания | 3.112433 | 4.177658 |

Таблица 11. Сравнение характеристик.

## Вывод

В процессе выполнения учебно-исследовательской работы нами были рассмотрены две системы. Для каждой из систем был составлен перечень состояний, граф переходов между ними и матрица интенсивности переходов, на основе которой были получены стационарные вероятности, с помощью которых были найдены и проверены характеристики систем. Согласно заданному критерию эффективности (максимальная производительность системы) лучший результат был определен у Системы 1, так как ее производительность выше.